

Révisions & Oraux ; Série N°6

Exercice 1 [IMT] Soit $n \geq 3$. On note (E_n) l'équation $e^x = nx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, (E_n) admet exactement deux solutions $\alpha_n < \beta_n$.
2. Étudier la monotonie de (α_n) , puis sa limite.
3. Donner un équivalent de α_n , puis un développement asymptotique à deux termes de α_n .

Exercice 2 [NAVALE PC] Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $Q = f(P)$ le polynôme défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer son déterminant.

Exercice 3 Soient E, F, G des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

Exercice 4 [MINES MP 2024] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $n = 2$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_i = 2) = 1 - p$, déterminer la loi de $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, $\mathbf{E}(Y)$, et la loi de X_i sachant $Y = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $\mathbf{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n} \right)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 5 [CENTRALE MP 2024] Soit $(\omega_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite d -périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $S_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda + \omega_k}{k}$.

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Réciproque ?
2. Montrer qu'il existe au plus un complexe λ tel que la suite $(S_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Montrer l'existence de $\Omega, \alpha \in \mathbb{C}$ tels que $S_{(m+1)d}(0) - S_{md}(0) = \frac{\Omega}{md} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$ quand $m \rightarrow +\infty$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la suite $(S_n(\lambda))$ converge.

Exercice 6 1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est de rang n et vérifie $A^2 = O_n$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}$.

2. Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^2 = O_{2n}$?

3. ★ Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = O_{3n}$?

Exercice 7 [ENS MP 2024] Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ intersectant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), et $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E . Montrer que $P = 0$. $\mathbb{R}[X, Y] = \text{Vect}(X^k Y^\ell)_{k, \ell \in \mathbb{N}}$

Exercice 8 [X MP 2024] Soient $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On pose $r = \min\{|z|, z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$, et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que $r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}$.
2. Soit $A_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = n, P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\sup_{P \in A_n} \min\{|z|, P'(z) = 0\} < +\infty$.

Révisions & Oraux ; Série N°6

Exercice 1 [IMT] Soit $n \geq 3$. On note (E_n) l'équation $e^x = nx$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, (E_n) admet exactement deux solutions $\alpha_n < \beta_n$.
2. Étudier la monotonie de (α_n) , puis sa limite.
3. Donner un équivalent de α_n , puis un développement asymptotique à deux termes de α_n .

Exercice 2 [NAVALE PC] Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $Q = f(P)$ le polynôme défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $Q(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer son déterminant.

Exercice 3 Soient E, F, G des espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si u est injectif, v est surjectif et $F = \text{Ker } v \oplus \text{Im } u$.

Exercice 4 [MINES MP 2024] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Pour $n = 2$, $\mathbf{P}(X_i = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_i = 2) = 1 - p$, déterminer la loi de $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$, $\mathbf{E}(Y)$, et la loi de X_i sachant $Y = \frac{1}{2}$.
2. Calculer $\mathbf{E} \left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n} \right)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Exercice 5 [CENTRALE MP 2024] Soit $(\omega_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ une suite d -périodique. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $S_n(\lambda) = \sum_{k=1}^n \frac{\lambda + \omega_k}{k}$.

1. Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Montrer que, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$. Réciproque ?
2. Montrer qu'il existe au plus un complexe λ tel que la suite $(S_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.
3. Montrer l'existence de $\Omega, \alpha \in \mathbb{C}$ tels que $S_{(m+1)d}(0) - S_{md}(0) = \frac{\Omega}{md} + \frac{\alpha}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$ quand $m \rightarrow +\infty$.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ pour que la suite $(S_n(\lambda))$ converge.

Exercice 6 1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est de rang n et vérifie $A^2 = O_n$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} O_n & I_n \\ O_n & O_n \end{pmatrix}$.

2. Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^2 = O_{2n}$?

3. ★ Combien y a-t-il de classes de similitude de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = O_{3n}$?

Exercice 7 [ENS MP 2024] Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, E une partie de $\mathbb{R}^2$ intersectant toute boule de rayon r (pour la norme euclidienne canonique), et $P \in \mathbb{R}[X, Y]$ s'annulant sur E . Montrer que $P = 0$. $\mathbb{R}[X, Y] = \text{Vect}(X^k Y^\ell)_{k, \ell \in \mathbb{N}}$

Exercice 8 [X MP 2024] Soient $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$.

1. On pose $r = \min\{|z|, z \in \mathbb{C}, P(z) = 0\}$, et on suppose $r > 0$. Si $a_k \neq 0$, montrer que $r^k \leq \binom{n}{k} \frac{|a_0|}{|a_k|}$.
2. Soit $A_n = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \deg P = n, P(-1) = P(1) = 0\}$. Montrer que $\sup_{P \in A_n} \min\{|z|, P'(z) = 0\} < +\infty$.